## Formazione alla continuità

*Imparare la geometria con gli studenti in un "percorso a ritroso"*

ANNA AIOLFI
Insegnante di scuola dell'Infanzia, collaborato a progetti di formazione, ricerca e conduce laboratori per Corsi di laurea in Scienze della Formazione Primaria, autrice di libri per la scuola dell'infanzia e di rubriche didattiche per la rivista "La scuola dell'infanzia" di Giunti.
annaaiolfi@libero.it
MARIA CANTONI
Laureata in scienze matematiche, ha fatto parte di Nuclei di ricerca in varie università, docente alla Scuola di Specializzazione per l'insegnamento secondario, "esperta" di GeoGebra, autrice di numerosi articoli sull'insegnamento della geometria.
mariacantoni2@gmail.com
DONATELLA MERLO
Formatrice e membro del Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica dell'Università di Torino, autrice di libri di testo per la scuola primaria e di articoli su riviste del settore education, è redattrice della rivista "Cooperazione Educativa".
donatellamerlo@icloud.com

Lo scopo di questo articolo è di illustrare il modo di impostare la formazione in ambito matematico che abbiamo sperimentato in questi anni negli istituti comprensivi in cui abbiamo lavorato alla costruzione di un curriculum verticale.
Ci è parso sostanziale cercare nella matematica stessa le fonti di ispirazione perché i concetti astratti che ne costituiscono l'ossatura nascono da suggestioni provenienti dal reale, da fatti che anche i bambini possono sperimentare ripercorrendo, sotto la guida dell'insegnante, il lungo cammino dell'umanità nelle sue tappe essenziali.
Per la geometria siamo allora partite da Euclide, dal libro primo degli Elementi in cui, come sostiene Attilio Frajese nell'introduzione al testo (Frajese, 1970), egli riassume, utilizza, sistematizza l'opera dei matematici precedenti ponendo le basi essenziali dell'insegnamento della matematica elementare. Dopo definizioni, postulati e nozioni comuni, che ci introducono all'opera, Euclide espone le teorie su uguaglianza dei triangoli, parallele ed equivalenza dei poligoni. Il primo libro gravita, sempre secondo Frajese, intorno a due proposizioni essenziali: la somma degli angoli di un triangolo e il teorema di Pitagora.
Euclide vuole dimostrare il teorema di Pitagora[1] come problema di equivalenze di aree e per arrivarci si costruisce *prima* tutti gli "strumenti" necessari per compiere la sua opera ed è come se ci accompagnasse nel suo percorso concettuale mostrandoci come conquistare tali strumenti. Percorrendo questo cammino a ritroso, abbiamo preso coscienza dei "prerequisiti" necessari per comprendere e dimostrare il teorema, che sostanzialmente coincidono con i traguardi della geometria per la scuola secondaria di I grado. Così facendo, però, abbiamo anche visto la disciplina nel suo sviluppo complessivo, a partire da quelli che oggi chiamiamo "enti primitivi", il punto, la retta e il piano, che non definiamo ma cominciamo a "portarci in testa" a partire da ciò che la realtà ci suggerisce. Nell'aggiungere oggetti geometrici, combinando gli enti primitivi, il disegno si precisa e, con un percorso logico-deduttivo che non ha uguali, la geometria "euclidea" prende corpo.
Come trasferire tutto ciò nelle menti dei bambini?

[1] Le proposizioni 47 e 48 che enunciano il teorema diretto e il suo inverso si leggono qui: Gli "Elementi" di Euclide http://www.scienzaatscuola.it/euclide/home/libro1.html

**Il modello formativo**

A partire da esperienze concrete, socializzate, discusse e condivise, si costruisce passo passo, attraverso un percorso di riflessione metodologica e concettuale insieme, quella geometria che quasi sempre nella scuola passa all'astrazione e alla formalizzazione delle dimostrazioni geometriche senza aver dato agli allievi gli strumenti concettuali necessari per capirne il senso.

La continuità si mette alla prova proprio in questi passaggi: nel riflettere su che cosa ogni ordine scolare consegna al successivo come strumento, quali conoscenze costruite nella scuola infanzia diventino strumenti nella primaria e quali conoscenze costruite nella primaria diventino strumenti nella secondaria di I grado. Intendiamo per "strumento" una conoscenza di cui gli allievi si siano veramente appropriati tanto da farvi appello nel momento in cui risolvono autonomamente un problema.

Ciò che proponiamo è ovviamente una *ricerca-azione,* con momenti di studio e di riflessione comune sostenuti da una sperimentazione in classe. Dopo una messa a fuoco, dal punto di vista teorico, dei punti di snodo del curriculum, si progettano e sperimentano le attività. Ponendo attenzione alle problematiche da affrontare con allievi di un'età specifica, gli insegnanti inventano e provano strategie didattiche che favoriscano l'evolvere delle conoscenze e il passaggio alla concettualizzazione. Il "fare concreto in classe" si confonde quindi con il percorso formativo.

Gli incontri in presenza, con lezioni teoriche e laboratori didattici, si alternano con il lavoro a distanza, su una piattaforma di e-learning[2]. La modalità mista consente di essere subito operativi: gli insegnanti sono seguiti individualmente durante la sperimentazione in classe e si avvalgono del sostegno e della spinta motivazionale data dalla comunità di pratica[3] al cui interno le relazioni interpersonali assumono sempre un ruolo significativo. Il dialogo continuo che si sviluppa in piattaforma consente di affrontare in modo molto diretto i problemi di metodo e di evidenziare subito le difficoltà, inserendo all'occorrenza altri momenti di studio o di confronto su temi specifici.

**L'inizio del "percorso a ritroso": Euclide riletto tramite Klein**

Il teorema di Pitagora nella scuola secondaria si accosta quasi come un "fuoco d'artificio". Lo vedi, lo assapori, lo godi ma non hai contribuito a realizzarlo nel senso che non sai come ci sei arrivato e con quale scopo, anche perché, appena conosciuto, diventa subito "una relazione" indispensabile per risolvere tutti i problemi di geometria che implicano una misura.

Facendo riferimento ad Euclide, abbiamo forse dato finora l'impressione che la nostra proposta sia centrata sulle convenzioni del passato. Al contrario, siamo convinte che si debba fare un ritorno ad Euclide ma reinterpretandolo alla luce della geometria moderna, per poter rielaborare le sue scoperte sfruttando nuovi "strumenti" concettuali e ciò che ci fornisce oggi la tecnologia: ci rivolgiamo alle "trasformazioni geometriche" con uno sguardo a Felix Klein, al suo *Programma di Erlangen*[4] del 1872 e, contemporaneamente, al software open source *GeoGebra*[5]. Facciamo un esempio di integrazione tra Euclide, Klein e GeoGebra. (figura 1)

---

[2] il modello formativo è spiegato qui https://ilpiaceredifarematematica.blogspot.it/p/la-formazione-in-matematica.html

[3] la "comunità di pratica" è un gruppo sociale nel quale potenziare la progettazione l'azione didattica attraverso un ampio dialogo con i colleghi; si scambiano, socializzano e condividono idee, problematiche, difficoltà e successi per costruire itinerari didattici di ampio raggio, progetti didatticamente sostenibili e in continuo approfondimento da un punto di vista culturale

[4] una spiegazione sintetica del programma di Erlangen si trova qui: http://www.isit100.fe.it/~maccaferri.m/geometrie/erlangen.htm

[5] in questo percorso assumono un ruolo importante gli strumenti tecnologici come il software GeoGebra, il cui uso precoce, a certe condizioni, può produrre risultati inaspettati (http://www.geogebra.org)

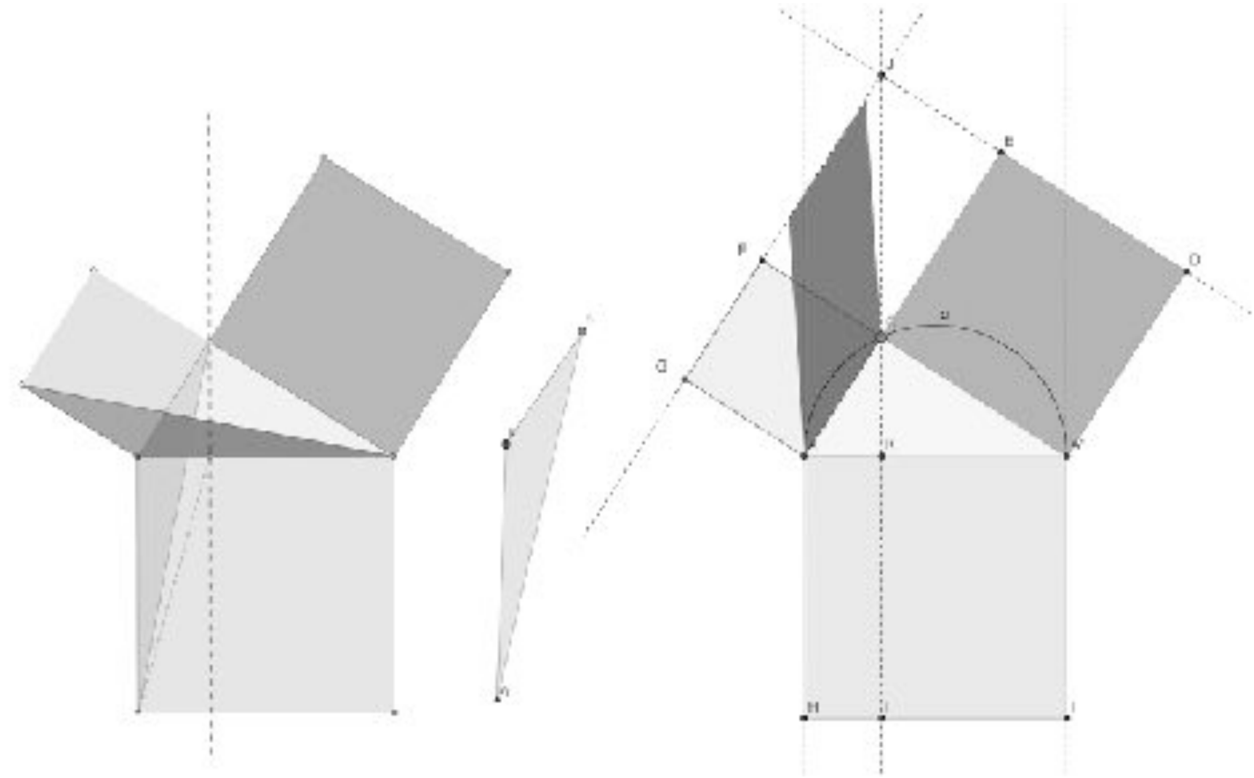

Figura 1 - Due dimostrazioni del teorema di Pitagora.

Nella figura 1 è illustrata, a sinistra, la dimostrazione classica di Euclide che si basa sull’equivalenza di alcuni triangoli. Facendo “ruotare” il triangolo ottusangolo l’equivalenza verrebbe subito evidenziata, ma Euclide non poteva né vedere né tanto meno utilizzare la "rotazione" come strumento, per i motivi storici che abbiamo espresso prima. Nella dimostrazione a destra, legata sempre al concetto di equivalenza, i quadrati diventano prima parallelogrammi e poi rettangoli, con basi e altezze uguali, relazioni facili da scoprire con una visione dinamica della situazione.[6] Euclide e Klein, dandosi la mano, producono nuovi modi di guardare che hanno una caratteristica fondamentale: sono molto vicini alle manipolazioni spontanee che fanno i bambini con le forme.

**Le forme e le loro caratteristiche**

Per arrivare a cogliere uguaglianze e disuguaglianze è indispensabile che nella scuola primaria gli allievi maturino sul piano concettuale le *caratteristiche delle forme piane,* per riconoscerle e confrontarle, e l’*idea di equiestensione*. Questi sono punti fondamentali del curriculum di geometria. Gli allievi, per verificare l’equiestensione, operano spontaneamente confronti tra le forme con il “trasporto rigido”, tornando in pratica ad Euclide: sovrappongono, piegano modelli di di carta cercando simmetrie, ruotano e fanno combaciare. Noi partiamo da queste azioni, rese coscienti, e li invitiamo ad esprimerle come “isometrie”, uno straordinario strumento di analisi di tutte le situazioni geometriche. Per capire simmetria, rotazione e traslazione, non si guardano solo i movimenti necessari a realizzarle, come fanno spontaneamente i bambini fin dalla scuola

[6] le dimostrazioni complete ed esempi di applicazione si trovano nel GeoGebraBook accessibile a questo indirizzo https://ggbm.at/Zvfvs8KU

dell'infanzia, ma si confrontano *la situazione iniziale e quella finale* per ragionare sugli *invarianti*[7], su ciò che cambia e ciò che resta uguale quando la figura si "sposta" sul piano geometrico. Quindi è indispensabile conoscere e saper utilizzare le specifiche proprietà di ciascuna isometria. Questo è un punto molto delicato che di solito mette in crisi gli insegnanti perché sono conoscenze che raramente fanno parte del loro bagaglio personale, quindi, in un percorso formativo, si deve partire da zero, imparando con gli allievi[8].
Continuiamo il percorso a ritroso ripartendo dalle forme.

**Dal tridimensionale al bidimensionale: la geometria nel piano**
Nella realtà tridimensionale in cui viviamo, vediamo le forme negli oggetti della nostra esperienza quotidiana. Estrarre forme geometriche da una statuetta è poco fattibile ma con oggetti abbastanza semplici da analizzare nelle loro parti, come una scatola o una costruzione, anche i bambini imparano a "staccare" mentalmente la forma piana dal solido per farla diventare oggetto di studio. Così imparano sia a ricostruire "scatole" usando rettangoli, quadrati, triangoli sia a ricostruire le forme stesse in vari modi finché la conoscenza delle proprietà delle forme e delle relazioni tra solido e piano si stabilizza. Bisogna abituarli a vedere le forme in modo dinamico, a studiare non una sola figura ma tutte le sue infinite variazioni e quindi operare continui confronti: si "toglie" una proprietà e succede che… se ne aggiunge un'altra e succede che… Questo è un modo di insegnare le forme che non fa uso di classificazioni e di sterili denominazioni ma entra dentro la loro struttura per rendere evidenti le specificità di ciascuna e le somiglianze reciproche. I software come GeoGebra aiutano tantissimo in questo percorso e riducono notevolmente i tempi di apprendimento. Per questo ci occupiamo anche di formare gli insegnanti sull'uso del software in modo che ne sappiano sfruttare al momento giusto tutte le potenzialità, soprattutto facendolo usare agli allievi. I file che presentiamo solitamente durante la formazione hanno anche questa funzione di stimolo e aiutano gli insegnanti stessi a modificare il loro sguardo sulla geometria.

**Gli enti primitivi**
Le forme aiutano a dare senso agli enti primitivi. Punto, retta e piano, sono pure astrazioni che devono essere costruite concettualmente, non fisicamente, altrimenti si snatura la geometria stessa. Ma presi in esame in modo astratto, non dicono nulla agli allievi. Se invece li facciamo intervenire come elementi che contribuiscono a costruire forme specifiche diamo loro un senso. Con il piano e la retta mettiamo in gioco anche le loro relazioni reciproche (appartenenza, parallelismo, perpendicolarità…) per arrivare a concetti più complessi come quello di angolo.
Il percorso concettuale deve essere nella testa degli insegnanti in modo che le attività siano coerenti con il punto in cui si trovano gli allievi e portino sempre ad obiettivi precisi. L'insegnante deve essere in grado di guidare il processo di astrazione che conduce al riconoscimento della *struttura* degli oggetti geometrici e consente poi di *modellizzare* le situazioni usando quelli più adatti.

**Dalle forme a segmenti, rette e punti**
Il processo di "scarnificazione" del reale dovrebbe cominciare appena possibile. Anche bambini molto piccoli capiscono che il quadrato della geometria è qualcosa da costruire nella propria mente perché non esiste come oggetto reale, è solo una proprietà di infiniti oggetti... ed è sempre imperfetto, anche quando per riprodurlo e costruirne dei modelli si usano strumenti sofisticati.

---

[7] le proprietà di cui si occupa la geometria sono quelle *invarianti* nelle trasformazioni che sfruttiamo, le isometrie ad esempio conservano lunghezze e angoli, elementi che definiscono le caratteristiche delle forme piane

[8] molti insegnanti della scuola secondaria di I grado ci hanno confessato di essere impreparati loro stessi a utilizzare le trasformazioni geometriche come strumenti per risolvere problemi di geometria perché non hanno mai avuto una formazione in tal senso.

Già nella scuola dell'infanzia i bambini imparano abbastanza facilmente ad associare il nome alla forma, ma capire in cosa consiste "l'essere quadrato" e saperlo raccontare è un altro paio di maniche. I bambini di quest'età chiamano "quadrato" qualsiasi forma dotata di quattro lati con dimensioni non molto dissimili tra di loro, non conoscono l'angolo retto ma se confrontano un triangolo con un quadrato si accorgono delle differenze e le esprimono con le parole che hanno. Toccare e confrontare, costruire e rappresentare le forme aiuta i bambini a formarsi immagini mentali che successivamente si potranno sfruttare. Spesso gli insegnanti si accontentano dei nomi delle forme e far prendere loro consapevolezza della insufficienza di questo tipo di conoscenza non è sempre facile. Per questo la ricerca-azione è uno strumento efficace perché provando a fare determinate attività con gli allievi si accertano questi fatti e si impara a gestire diversamente tutta l'attività. Ad esempio ci si accorge che le attività con fili tesi aiutano a costruire un'idea di rettilineità, concretizzando le idee di segmento e di retta, mentre far raccontare un gioco serve per mettere in evidenza l'idea di posizione e la sua rappresentazione con un punto.
I disegni infantili, sintetici ed essenziali, sono già un potente strumento di mediazione tra il mondo reale e la rappresentazione geometrica. I primi "scarabocchi" sono tutti costruiti con punti e segmenti, poi compaiono le prime forme chiuse e infine i poligoni. È come se i bambini avessero già in testa la geometria ma senza averne coscienza.
Siamo così arrivati... all'inizio del percorso, guardando ora agli allievi e ora agli insegnanti. Un intreccio ineludibile.

**Dalle parole dei bambini ai concetti matematici**
Dopo queste esperienze gli insegnanti sono pronti per il passaggio finale che consiste nel costruire una mappa riassuntiva del percorso fatto, un po' in classe e un po' discutendo nella comunità di pratica. Gli insegnanti, in dialogo continuo, hanno imparato a ricostruire la geometria per se stessi, dovrebbero quindi saper cogliere i fili rossi che collegano i concetti nei tre ordini scolari come esemplificato in questa tabella[9]:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Scuola dell'infanzia** | Manipolazione di oggetti: costruire, montare, smontare<br>Spiegare come... perché.... | Dalle intersezioni di rette alle forme: rettilineità, segmenti come via più corta per unire due punti, punti come posizioni nel piano, rette come prolungamenti di segmenti, numero minimo di segmenti per costruire una forma... | I ricoprimenti e le tassellazioni: una sola forma, più forme... triangoli, quadrilateri... che cosa cambia, che cosa serve per... | I movimenti sul piano: spostarsi, ruotare, rotolare, scivolare...<br>Le azioni: sovrapporre, far combaciare, ricalcare... |

9 la quarta colonna non nasce per ultima ma si interseca con le altre al momento opportuno

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Scuola primaria** | Dalla realtà in tre dimensioni al piano geometrico bidimensionale: solidi e loro sviluppi piani, con quali forme, con quali regole... | Le forme, le loro caratteristiche, le loro trasformazioni, la modellizzazione geometrica di situazioni realistiche usando enti fondamentali (punto, retta, piano, angolo...) e le loro relazioni (parallelismo, perpendicolarità, appartenenza...), il cerchio come strumento per costruire segmenti uguali... | L'equiestensione e il calcolo dell'area dei principali poligoni giustificando le formule con le caratteristiche delle forme, le relazioni geometriche e le isometrie... | Le isometrie nel piano con le loro proprietà (assi di simmetria, vettori, centri di rotazione e angoli...) |
| **Scuola media** | *Dalle suggestioni della realtà e dalle osservazioni sulle manipolazioni concrete, il tutto rinasce ad un altro livello concettuale e con maggiore consapevolezza ed anche **il teorema di Pitagora** può a sua volta divenire **strumento** sia nella visione della realtà che per essere base di un lavoro più matematicamente maturo.* | | | |

Nello stesso tempo hanno condiviso metodi e strumenti: ad esempio hanno compreso l'importanza di far parlare gli allievi, di chiedere loro di spiegare quel che hanno in testa valorizzando errori e differenze, di giustificare le loro scelte per imparare ad argomentare, di sfruttare la tecnologia per capire.
Raccogliere le parole dei bambini per trasformarle in *matematica* non è facile e per imparare come si fa c'è bisogno di lavoro sul campo, di confronto continuo con situazioni reali, altrimenti si rimane solamente su un piano accademico. Sicuramente si mettono in crisi le vecchie pratiche didattiche, e con esse molte certezze, ma si apre anche la strada per costruire qualcosa di completamente nuovo.

BIBLIOGRAFIA


- *Arzarello F. et al. (2011), Matematica: non è solo questione di testa, Trento, Erickson*
- *Frajese A., Maccioni L. (a cura di) (1970), Gli elementi di Euclide, Torino, UTET (Ristampa 1988)*
- *Freudenthal H. (1994), Ripensando l'educazione matematica, Brescia, La Scuola*
- *Manara C. F. (1994), L'evoluzione della geometria nel secolo XIX e conseguenze didattiche in L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, novembre 1994, pp. 619-661, Paderno del Grappa, Centro Ricerche Didattiche Ugo Morin*
- *Manara, C. F. (1997), Costruire la geometria, in L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, agosto 1997, pp. 337-349, Paderno del Grappa, Centro Ricerche Didattiche Ugo Morin*
- *Marastoni G., Facciamo geometria, Bergamo, Spaggiari Junior (in preparazione, riedizione ampliata)*


SITOGRAFIA


- *Carlo Felice Manara http://www.carlofelicemanara.it sito da cui sono liberamente scaricabili tutti gli articoli*
- *UMI-MPI, Matematica 2001 - La matematica per il cittadino scaricabile da http://www.umi-ciim.it/materiali-umi-ciim/primo-ciclo/*

- *Una proposta per l'insegnamento della Geometria* *http://www.carlofelicemanara.it/index.asp?idPagina=21&Titolo=Una%20proposta%20per%20l'insegnamento%20della%20Geometria*
- *Costruiamo la geometria insieme ai bambini (a cura di M. Cantoni e D. Merlo) in* *https://www.educreations.com/lesson/view/costruiamo-la-geometria-insieme-ai-bambini/11682541/*

Cooperazione Educativa Vol. 66, n. 3, settembre 2017, pp. 33-37 - Edizioni Erickson